



Matematik på lodrette flader i aktivt tænkende klasserum

LÓA BJÖRK JOELSDÓTTIR, LEKTOR I MATEMATIK, VIA UC OG PH.D.-STUDERENDE, AARHUS UNIVERSITET

LISE DAUSEN, ADJUNKT I MATEMATIK, VIA UC

METTE VEDSGAARD CHRISTENSEN, DOCENT I SPROG OG LITERACY, VIA UC

TINA MOHR NICKELSEN, PROJEKTMEDARBEJDER, PROJEKT ALLE I UDDANNELSE

I denne artikel introducerer vi undervisningsmetoderne *Number talks* (Sun et al., 2018) og *Matematik på lodrette flader* (Liljedahl, 2016). Formålet med metoderne er at skabe mere sproglig interaktion mellem eleverne i matematikundervisningen samt at udvide elevernes strategiske repertoire. Når eleverne samarbejder om at regne på lodrette flader og løser opgaver med flere veje til målet, arbejder de også sammen om at læse og forstå matematiske begreber og om at anvende, diskutere og vurdere forskellige regnestrategier. Erfaringerne, som vi præsenterer og diskuterer, stammer fra et aktionslæringsprojekt, hvor vi har samarbejdet med lærere om at afprøve metoder, der udvikler elevernes fagsproglige færdigheder. Nedenfor præsenterer vi kort baggrunden for metoderne, og gennem observationer fra undervisningen redegør vi for erfaringerne med at bruge metoderne i en 4. klasse. Afslutningsvis diskuterer vi de videre potentialer for at arbejde med kollaborativ opgaveløsning på lodrette flader.

Alle elever skal udvikle deres fagsprog

Når elever deltager i kommunikation om faglige begreber, kan eleverne efterhånden gøre de faglige begreber og forståelser til deres egne (Sfard, 2008). Men i matematikundervisningen er der tradition for, at det er læreren, som fortæller, viser og forklarer. I en traditionel tavleundervisning indgår læreren i sproglig interaktion med enkelte elever – ofte de samme elever, og disse normer og forventninger til sproglige praksisser i undervisningen kan være svære at ændre (Yackel & Rasmussen, 2002). Det var også erfaringen fra lærerne i vores undersøgelse, og det blev dermed udgangspunktet for arbejdet med at udvikle en matematikundervisning, der kan skabe rammer for, at eleverne kommer til at bruge fagsproget aktivt, som vi præsenterer i denne artikel. Data og analyser stammer fra projekt *Alle i Uddannelse*, som gennemføres på to skoler i Horsens¹. Projektet er organiseret som et aktionslæringsprojekt, derfor sker udviklingen af nye tiltag i samarbejde med de lærere, der skal levere aktiviteterne, ofte på baggrund af fælles diskussioner om konkrete udfordringer eller udviklingspotentialer for undervisningen (Nielsen & Nielsen, 2010). En af de identificerede udfordringer handlede om elevernes fagsprog i matematik: Lærerne ville gerne udvikle og afprøve undervisningsaktiviteter, der fik eleverne til at bruge sproget mere i matematiktimerne.

1 Projektet er finansieret af A. P. Møller Fondens Folkeskoledonation.

Derfor blev lærerne præsenteret for metoder, der sætter rammer for, at alle elever indgår i sproglig interaktion om de matematiske begreber, fx som det er tilfældet med *Matematik på lodrette flader*, som vi præsenterer nedenfor. Metoderne har ikke kun sproglige mål: Udover at styrke elevernes forståelse af matematiske begreber er deres strategiske kompetencer og forståelser også i fokus, det er tilfældet i aktiviteten *dot talks* (Sun et al., 2018), som vi ligeledes præsenterer nedenfor. Afprøvningsresultaterne blev dokumenteret med skriftlige klasserumsobservationer. Nedenfor tager vi udgangspunkt i en let bearbejdet sammenskrivning af disse observationer, når vi dokumenterer og analyserer erfaringerne fra en konkret afprøvning af metoderne i en 4. klasse.

Udvikling af talforståelse og fleksible strategier: *dot talks*

Forskere inden for matematikkens didaktik har i mange år haft fokus på vigtigheden af at stimulere elevernes fleksible strategiudvikling, herunder med design af metoder, som støtter elevernes udvikling af fleksibilitet i opgaveløsningen (Verschaffel et al., 2009). *Number talks* er – som navnet siger – klasserumssamtaler om tal, hvor eleverne deler deres strategier med hinanden. *Dot talks* – som er den version, vi afprøvede i projektet – er en version af *Number talks*, hvor eleverne fx undersøger antallet af prikker i forskellige mønstre. Når eleverne regner med prikker i stedet for tal, bliver de mindre opmærksomme på tal og hovedregning og mere opmærksomme på forskellige strategier til at komme frem til svaret. *Number talks* og *dot talks* er dermed med til at udvikle elevernes brug af regnestrategier og deres talforståelse. Fokus er på matematisk kommunikation og ræsonnement og på, at eleverne kan forklare og begrunde frem for at levere et rigtigt svar (Sun et al., 2018). Klassesamtalen struktureres endvidere på måder, der skaber rammer for, at alle elever når at tænke over et svar og bidrage til klassesamtalen om løsningsstrategier.

” Når eleverne regner med prikker i stedet for tal, bliver de mindre opmærksomme på tal og hovedregning og mere opmærksomme på forskellige strategier til at komme frem til svaret.

Undervisningsklip 1: *dot talks*

4. klasse arbejder med tal og talforståelse. Læreren viser eleverne et billede med 10 sorte prikker i et lidt tilfældigt mønster og spørger så eleverne: Hvor mange prikker er der? En efter en rækker eleverne deres tommelfinger op. Det betyder, at de har et svar. Når læreren ser en tommelfinger, får eleven et nik. Så kan tommelfingeren tages ned, og resten af klassen kan tænke videre uden at lade sig presse af, at andre elever har fingeren oppe. Læreren venter, og flere tommelfinger vises. Nu får eleverne lov til at forklare, hvordan de kom frem til svaret. Eleverne har flere bud: En elev talte alle prikkerne en efter en. En så, at de kunne deles op i tre grupper med tre prikker i hver, og at der var en til overs. En anden så to grupper med fem prikker i hver. En elev så to grupper med tre prikker og en anden gruppe med fire. Læreren skriver elevernes forskellige strategier op på tavlen som små regnestykker: $3 \cdot 3 + 1$, $5+5$ eller $5 \cdot 2$ og $3 + 3 + 3$. Nu spørger hun eleverne: Hvad er det rigtige at gøre? Igen får eleverne tid til at tænke, inden en elev prøver: Er de ikke allesammen rigtige?

Eksemplet ovenfor viser, hvordan elevernes forskellige strategier bliver synlige og kan deles i klassesamtalen. Elevens afsluttende konklusion om, at alle løsninger er rigtige, viser, at eleven er ved at opbygge en forståelse af, at matematiske problemer kan løses med forskellige strategier. *Dot talks* kan altså støtte implementeringen af en kultur, hvor eleverne deler strategier med hinanden. I *dot talks* fjernes mulig angst hos eleverne rettet mod tallene. I stedet kan eleverne fokusere på at se

mønstre, forklare deres måde at se antallet på, og de kan erfare, at der kan være mange veje frem til det samme svar. *Number talks* er ofte en aktivitet på 10-15 minutter, hvor det er vigtigt, at eleverne får tid til at tænke, inden klassesamtalen starter. De fleste lærere har erfaringer med, at når der stilles spørgsmål i klassen, er der elever, som hurtigt råber svaret eller rækker hånden højt op for at indikere, at de har fundet svaret. Dette kan skabe en kultur i klassen, som er præget af konkurrence og evt. skabe angst hos nogle elever (Sun et al., 2018). I *number talk*-processen markerer eleverne derfor stille med tommelfingeren, når de har en løsning. Formålet er, at flere elever har tid og ro til at nå frem til en løsning og til efterfølgende at bidrage til samtalen på klassen.

Number talks vil dermed være med til at udvikle en kultur i klassen, som sætter rammer for, at eleverne udvikler strategier bygget på tal- og begrebsforståelse, hvor eleverne er aktivt deltagende og deler og respekterer hinandens ideer. Gennem *number talk*-aktiviteter lærer eleverne også, at fejl og forvirring er en del af processen og vejen til udvikling af dybere forståelse (Humphreys, 2016).

” **Elevens afsluttende konklusion om, at alle løsninger er rigtige, viser, at eleven er ved at opbygge en forståelse af, at matematiske problemer kan løses med forskellige strategier.**

Aktivt tænkende og ikke-tænkende klasserum

Peter Liljedahl (2016) har udviklet ideen om *The Thinking Classrooms* i matematikundervisningen. Liljedahls undersøgelser viser, at undervisningen sjældent kræver, at eleverne skal være aktivt tænkende i matematiktimerne. Når eleverne bliver stillet problemløsningsopgaver, går de i stå. Problemløsning defineres som opgaver, hvor man ikke kan følge fx en lært algoritme for at komme frem til et svar. Her skal eleverne i stedet forstå problemet, undersøge løsningsmuligheder, prøve sig frem eller vælge metoder, de selv kan se er relevante, og som bygger på deres forståelse for opgavens matematiske indhold. Liljedahl konkluderer, at de klasserumsnormer, som er udviklet i de observerede klasser, kan beskrives som *non-thinking classrooms*. På baggrund af disse observationer har Liljedahl udviklet de såkaldte *thinking classrooms*, defineret som undervisningsmiljøer, der kræver aktiv tænkning af eleverne, alene og sammen med andre, og hvor eleverne altså lærer, udvikler viden og forståelse gennem aktiviteter og samtale i et tænkende klassefællesskab.

” **Liljedahls undersøgelser viser, at undervisningen sjældent kræver, at eleverne skal være aktivt tænkende i matematiktimerne.**

Liljedahl har identificeret hele 14 elementer, som er vigtige for udvikling eller vedligeholdelse af de aktivt tænkende klasser i matematikundervisningen (Liljedahl, 2017). Liljedahl fremhæver blandt andet undervisning med udgangspunkt i problemløsningsaktiviteter, hvordan disse aktiviteter introduceres for eleverne, og hvordan grupper bliver sat sammen. Et andet element er de lodrette flader, som vi vil introducere nedenfor. Fem af disse elementer handler direkte om *classroom norms* [som beskrevet i Yackel & Rasmussen, 2002] (Liljedahl, 2018) og altså om at ændre på forventninger til interaktion og samarbejdsformer i undervisningen.

Liljedahl (2016) har sammenlignet gruppearbejde i fire situationer, hvor eleverne positioneres fysisk forskelligt, og hvor de anvender forskellige teknologier. Han sammenlignede fire situationer: a) stående med whiteboard (en overflade, hvor det er muligt at viske ud), b) stående med flipover /

papir, c) siddende med whiteboard og d) siddende med papir. Hans resultater viser, at de grupper, der stod ved de lodrette flader med mulighed for at viske ud, arbejdede på måder, der i højere grad indebar samarbejde og kommunikation. Hans resultater viser, at elever, der står op og samarbejder på store skriveflader, hvor de har mulighed for at prøve sig frem og viske ud, får de bedste resultater. Når de står op, har eleverne sværere ved at gemme sig, og i hans undersøgelse viser det sig som øget engagement i aktiviteter og diskussion. De lodrette flader med mulighed for at viske ud giver tilsyneladende eleverne frihed til at undersøge og prøve sig frem. Mulighed for at viske ud blev ganske vist ikke brugt meget, men det så ud til, at eleverne kom hurtigere i gang med at skrive og prøve sig frem, og at de efterfølgende brugte hele skrivefladen. De grupper, der brugte papir, viste en tendens til først at skrive, når de havde fundet vejen frem til svaret. Resultaterne viser altså, at grupper, som samarbejder ved lodrette flader (fx whiteboards), hvor de kan viske ud, og som dermed har mulighed for at prøve sig frem, i højere grad bliver aktivt tænkende. De viser mere vedholdenhed i selve problemløsningsprocessen, de er mere aktive, de samtaler mere og udviser mere „knowledge mobility“ – som bedst kan oversættes til fleksibilitet i anvendelse af matematikfaglig viden – end dem, som arbejder ved de øvrige typer overflader, som indgår i Liljedahls forskning.

Vi brugte Liljedahls resultater til at introducere metoden *Matematik på lodrette flader*. Lærerne fik hængt whiteboards op, så eleverne kunne arbejde parvis eller i grupper om at løse matematikopgaver på lodrette flader med whiteboardtuscher. Opgaver og organiseringen af undervisningen lagde op til samarbejde og interaktion, men også strategiske overvejelser. Eleverne fik problemløsningsopgaver, der krævede kommunikation og samarbejde, og hvor der var flere veje til målet.

Undervisningsklip 2: *Matematik på lodrette flader*

Matematiklæreren har delt eleverne op i grupper på tre. Hver gruppe skal stille sig ved et lamineret A3-papir, der er et til hver gruppe hængt op forskellige steder i klassen og ude på gangen. De laminerede A3-papirer er deres tavler, her skal de hjælpe hinanden med at løse en matematikopgave. Læreren udleverer en lille lap papir med opgaven, som eleverne nu skal samarbejde om at forstå, skrive op på tavlen og regne.

Den første opgave, læreren udleverer, er en opskrift på snobrød, som skal laves om, så der er nok dej til tre gange så mange snobrød. I opskriften indgår der fx $\frac{1}{2}$ pakke gær, $\frac{1}{2}$ kg mel og $\frac{1}{3}$ liter vand. De har alle fået en tusch, så de alle kan bidrage til udregningen. De læser, og de diskuterer, hvordan de forstår opgaven, og de forsøger sig frem. De kommer frem til et svar, men de går i stå, da de skal skrive enhederne. Hvad er det egentligt, de regner med? En elev mener, at enheden må være gram. De andre er tavse. De ender med at sætte en streg og et spørgsmålstegn: De ved godt, der skal angives en enhed, men de er usikre på, hvad de skal skrive.

I vores observationer af elevernes arbejde med snobrødsopskriften ser vi engagement og deltagelse fra eleverne. Rammerne inviterer til, at alle elever er i sproglig interaktion om brøker og enheder, fordi det ikke er nemt for elever at gemme sig eller undvige den faglige kommunikation, der finder sted om den matematiske problemstilling, når de står ved de lodrette flader. Alle elever er altså i gang med aktiviteter, der involverer og dermed potentielt udvikler deres fagsprog og matematiske tænkning, fx læsning og diskussion af den stillede opgave og ikke mindst vurderingen af forskellige løsningsstrategier.

Når eleverne har mulighed for at viske ud, er der mulighed for, at de hurtigere kommer i gang med at notere de første tanker på tavlen, de kan jo altid slette dem igen. Men hverken i vores eksempel eller hos Liljedahl (2018) ser det ud til, at de bruger den mulighed. Måske på grund af en klasse-

rumskultur, hvor man helst ikke skal lave fejl, men også en kultur for at dokumentere løsningsprocessen på en bestemt måde, der kan herske i nogle matematikklasser.

Ved udvikling af *thinking classrooms* har selve problemet, som grupperne arbejder med på lodrette flader, betydning. Det skal helst være problemløsningsopgaver, som lægger op til, at eleverne diskuterer forskellige anvendelser af regnestrategier eller problemløsningsstrategier, så eleverne indgår i en dialog gennem løsningsprocessen (Liljedahl, 2018). Læreren rolle i dialogen med grupperne er at stille spørgsmål, der fremmer tænkende elever i matematikundervisningen. Læreren spørger derfor: „Hvad har I tænkt?“ og ikke: „Hvad har I fået?“ På den måde sætter læreren tonen for samtalen og for, hvad der er væsentligt i matematikundervisningen. Eleverne indgår i et undervisningsmiljø, hvor der lægges vægt på matematisk tænkning og sproglig interaktion, og der er skabt rammer for et aktivt tænkende klasserum.

Undervisningsklip 3: Læreren samler op

Nu kalder læreren eleverne sammen, timen er snart slut. En af grupperne er lidt utilfredse med, at deres opgaver skal viskes ud. Læreren spørger eleverne, om de fik brugt nogle matematikord i grupperne. Eleverne giver flere eksempler på ord og begreber, de har brugt: En elev siger, at de fordoblede en brøk. Læreren tager fat i elevens udtalelser og skriver brøken op på tavlen. Hun tegner og skriver og forklarer.

I opsamlingen tager læreren udgangspunkt i faglige pointer fra elevernes arbejde. I vores observationer ser vi, at mange elever byder ind i den faglige opsamling. De har brugt fagbegreberne og diskuteret problemstillingerne med klassekammerater under arbejdet på de lodrette flader forud for den fælles opsamling og har nu mulighed for at bidrage. Læreren rolle er at stille spørgsmål til elevernes matematiske tænkning og samtidig fremhæve de matematiske begreber. Faglige pointer og regnestrategier fra elevernes tavler trækkes frem. Erfaringer og resultater gøres fælles i opsamlingen. Læreren faciliterer en opbygning af fælles faglig viden og et fælles fagsprog i klassen (Blomhøj, 2016).

I samtalen mellem læreren og eleven skal der være fokus på det, som Liljedahl beskriver som *keep thinking*-spørgsmål. Det er spørgsmål som: „Hvad har du tænkt?“ og altså spørgsmål, som hjælper eleverne til at fortsætte deres arbejde og matematiske tænkning, og som sætter rammer for, at eleverne får muligheder for at dele forståelser, tænkning og strategier. *Stop thinking*-spørgsmål er modsætningen til *keep thinking*-spørgsmål. Et *stop thinking*-spørgsmål kan være: „Hvad har du fået?“ og altså spørgsmål, hvor svaret enten er rigtigt eller forkert, og som ikke lægger op til at fortsætte den matematiske tænkning (Liljedahl, 2016).

” **Stop thinking-spørgsmål er modsætningen til keep thinking-spørgsmål. Et stop thinking-spørgsmål kan være: „Hvad har du fået?“**

Som beskrevet tidligere anbefales lodrette whiteboards frem for papir, selvom muligheden for at viske ud på whiteboards sjældent anvendes (Liljedahl, 2016). Vi ser i vores observationer, at nogle elever er utilfredse med, at deres arbejde på whiteboardet skal viskes ud efter endt fælles opsamling på klassen. De normer, som mange elever er vokset op med gennem hele deres skoletid, hvor det primære fokus ofte er på produktet frem for løsningsprocessen (Skemp, 1976), bidrager til,

at eleverne har svært ved, at deres produkt på whiteboardtavlen bliver visket ud. Det tager tid at ændre normer og udvikle klassekulturer med fokus på processen.

Hvorfor arbejde med fagsprog og fleksible strategier i matematikundervisningen?

En af de prøver, som eleverne i den danske folkeskole møder, når de afslutter deres grundskoleforløb i matematik, er prøven uden hjælpemidler. I maj 2019 er to af opgaverne i prøvesættet en subtraktionsopgave, $701 - 149 = ?$ og en divisionsopgave, $7021 : 7 = ?$ Tæt ved en tredjedel af de danske 9.-klasseselever svarer forkert på disse to opgaver. Elever, der har modtaget mellem fire og fem lektioners matematikundervisning hver uge gennem hele deres skoletid, har altså svært ved at gennemskue, hvordan disse opgaver kan regnes. Endnu værre ser det ud for omskrivning mellem forskellige enheder. Eleverne bliver bedt om at omskrive 1 m^3 til cm^3 , hvilket ikke lykkedes for 85 procent af 9.-klasseseleverne i maj 2019 (Børne- og Undervisningsministeriet, november 2019). Vi vurderer, at det faktum, at tæt ved en tredjedel af eleverne, der forlader den danske folkeskole, ikke kan trække 149 fra 701 og dividere 7021 med 7, tegner et billede af en manglende talforståelse og en manglende forståelse for de grundlæggende faglige begreber hos danske elever trods mange timers matematikundervisning. Der er altså grund til at udvikle og undersøge metoder og aktiviteter, der kan udvikle elevernes talforståelse og strategiske kompetencer.

Dette var en af anledningerne til, at vi fik øje på *Number talks* og *Matematik på lodrette flader* – en anderledes tilgang til arbejdet med talforståelse og begrebsforståelse i matematikundervisningen. En tilgang, hvor eleverne tænker, taler og tegner matematik frem for at huske regler. En tilgang, hvor spørgsmålet til eleverne i matematikundervisningen er: „Hvad har du tænkt?“, „Hvordan vil du forklare...?“ eller „Kan du forklare det på flere måder?“ Og ikke: „Hvad har du fået?“ Der er en lang tradition for procesorienteret matematikundervisning i dansk skolematematik (Niss & Jensen, 2002). *Matematik på lodrette flader* og *dot talks* er konkrete bud på, hvordan den enkelte matematiklærer kan skabe mere sproglig interaktion mellem eleverne i matematikundervisningen og udvikle elevernes matematiske tænkning, deres fagsprog og samtidigt et bredt repertoire af regnestrategier og problemløsningsstrategier.

Referencer

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. Frydenlund Academic.

Børne- og Undervisningsministeriet (november 2019). *Vejledning til folkeskolens prøver i faget matematik – 9. klasse*. Styrelsen for Undervisning og Kvalitet.

Humphreys, C. (2016). Number Talks in High School. *New England Mathematics Journal*, 49, 28-39.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. I: Felmer, P., Kilpatrick, J., & Pehkonen, E. (red.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (s. 361-386). Springer.

Liljedahl, P. (2017). *Building a Thinking Classroom in Math*. <https://www.edutopia.org/article/building-thinking-classroom-math>

Liljedahl, P. (2018). On the Edges of Flow: Student Problem-Solving Behavior. I: Amado, N., Carreira, S., & Jones, K. (red.), *Broadening the Scope of Research on Mathematical Problem Solving* (s. 505-524). Springer.

Nielsen, B. S., & Nielsen, K. A. (2010). Aktionsforskning. I: Brinkmann, S., & Tanggaard, L. (red.), *Kvalitative metoder. En grundbog* (s. 97-120). Hans Reitzels Forlag.

Niss, M., & Jensen, T. H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Sun, K. L., Baldinger, E. E., & Humphreys, C. (2018). Number Talks: Gateway to Sense Making. *Mathematics Teacher*, 112(1), 48-54.

Vershaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.

Yackel, E., & Rasmussen, C. (2002). Beliefs and norms in the mathematics classroom. I: Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (red.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (s. 313-330). Kluwer Academic.

Om forfatterne

Mette Vedsgaard Christensen er docent og forskningsleder for program for sprog og literacy, VIA University College. Hun har arbejdet på en række forsknings- og udviklingsprojekter om sprog og læring (fx Grammar3-projektet 2018-2019) og har skrevet forskningsartikler og bidrag til lærebøger om sprog, læsning og læring.

Tina Nickelsen er uddannet lærer og læsevejleder og har i en lang årrække arbejdet i folkeskolen. Hun er projektmedarbejder i projekt *Alle i Uddannelse*, hvor hun understøtter det faglige arbejde i samarbejde med skolernes vejledere i de enkelte fag på de deltagende skoler.

Lise Dausen er tidligere folkeskolelærer og har siden 2018 undervist ved læreruddannelsen VIA University College. De seneste år har hun deltaget i flere forsknings- og udviklingsprojekter inden for matematikdidaktik med særligt fokus på at understøtte elever i matematikvanskeligheder.

Lóa Björk Jóelsdóttir har fra 2009 undervist ved læreruddannelsen i VIA University College, er koordinator for program for matematik og naturfagsdidaktik (VIA), hvor hun har deltaget i flere forskningsprojekter, og fra 2020 ph.d.-studerende ved Aarhus Universitet.