



Abstrakt matematik i et børneperspektiv

MARIA KIRSTINE ØSTERGAARD, PH.D.-STUDERENDE, KØBENHAVNS PROFESSIONSHØJSKOLE OG AARHUS UNIVERSITET, DPU
ANNA KARLSKOV SKYGGEJERG, LEKTOR, PH.D., AARHUS UNIVERSITET, DPU

Forestillinger om matematik grundlægges tidligt i barnets liv, og forskning viser, at de tidlige matematikforestillinger har konsekvenser senere i livet. I introduktionen til matematisk tænkning, herunder abstrakte spørgsmål, kan man med fordel anvende kunstnerisk bearbejdede billedbøger, der inviterer barnelæseren til fordybelse og refleksion i samvær med voksne. Med udgangspunkt i eksisterende viden om matematikforestillinger, matematikfaget i grundskolen og forskning i billedfortællinger fremdrages to aktuelle billedbøger, der indeholder et potentiale for udvikling af matematisk opmærksomhed.

Betydningsfulde erfaringer med matematik

Når et barn og en voksen læser en billedbog sammen, er det en anledning til at undre sig og i fællesskab reflektere over livets fænomener og sammenhænge. Principielt gælder det, uanset om emnet er krop, kærlighed, natur eller som her matematik. Når emnet er matematik, er billedbogsforestillinger dog ofte meget faktisk orienteret, og barnet bliver traditionelt sat til at løse simple regneopgaver, som ikke vækker meget undren. Sådan behøver det dog ikke at være: Beskæftigelsen med matematik rummer mulighed for at kombinere konkret og abstrakt tænkning, og billedbøger kan give børn anledning til at få øje på matematikken som område. Det gælder de to bøger, vi beskæftiger os med i denne artikel: Jan Egesborg, Johannes Töws og Pia Bertelsens *Fermats sidste sætning* (2015) og Kristin Roskiftes *Alle tæller med* (2019).

Matematik vækker forskellige forestillingsbilleder hos både børn og voksne. Mens nogle finder faget og disciplinen matematik spændende og fascinerende, finder andre det abstrakt og svært at forholde sig til. Allerede inden man starter i skole, har man en forestilling om, hvad fagene går ud på, og hvad man skal lære. Det er langt fra sikkert, at virkeligheden lever op til forventningerne, men forestillingerne har en betydning i sig selv. Der har således længe været forskningsmæssig enighed om, at skoleelevers forestillinger om matematik spiller en vigtig rolle i forhold til deres læring og motivation (f.eks. Furinghetti & Pehkonen, 2002; Schoenfeld, 1988).

Udviklingen af elevers forestillinger om matematik er en langvarig proces, som begynder med forældre, bedsteforældre og pædagogers interaktion med barnet om matematik. Ifølge inspirationshæftet om natur, udeliv og science, som blev udgivet i forbindelse med lanceringen af den styrkede pædagogiske læreplan for dagtilbudsområdet, er de første oplevelser med matematikken særdeles vigtige: „Børns tidlige interesse for og arbejde med matematiske fænomener og begreber har betydning for deres senere opfattelse og succes med matematik“ (EVA & BUM, 2019, s. 31) – faktisk i så høj grad, at børns matematiske forståelse i fireårsalderen er en af de stærkeste indikatorer på, hvordan de klarer sig helt generelt senere i skoleforløbet (EVA, 2018). Hvis matematikken eksempelvis fremstilles som noget, der primært handler om regler og formler, med et succeskriterium,

der retter sig mod at finde et facit hurtigt, og hvor arbejdsformen er individuelle træningsopgaver, er der risiko for, at børnene ved skolestart vil bygge deres tilgang til matematikken på dette billede og opfatte faget som noget, der blot hører til i skolen og ikke har noget at gøre med den virkelige verden. Og jo flere erfaringer de får, som understøtter dette billede, des mere fasttømret vil det blive, og dermed proportionelt svært at ændre. Der er altså god grund til allerede tidligt i skoleforløbet – eller endda før – at fokusere på elevernes forestillinger om, hvad matematik er, hvad det kan bruges til, og hvilken rolle det spiller i verden.

” **Udviklingen af elevers forestillinger om matematik er en langvarig proces, som begynder med forældre, bedsteforældre og pædagogers interaktion med barnet om matematik.**

Særligt bør matematikken som disciplin eller videnskabsfag have en væsentlig plads i udviklingen af disse forestillinger. Dette aspekt af faget indeholder blandt andet overvejelser om, hvad matematikken anvendes til, hvordan den har udviklet sig, og hvilken samfundsmæssig indflydelse den har, men også om matematikkens karakteristiske problemer og arbejdsmetoder samt dens filosofiske og æstetiske aspekter. Et sådant perspektiv kan være med til at vise, at matematik er andet og mere end et skolefag og sætte matematikken i en kontekst, der bidrager til oplevelsen af relevans. Det er desuden et perspektiv, der kan bidrage til at udvikle evnen til abstrakt tænkning.

Selv om det for nogle måske lyder ambitiøst og endda urealistisk at beskæftige sig med disse sider af faget med førskole- eller indskolingsbørn, vil vi i det følgende argumentere for, at det med den rette tilpasning både er muligt og givende at adressere abstrakte aspekter af matematikken, her eksemplificeret i anvendelsen af billedbøger. Først retter vi dog blikket mod, hvordan den abstrakte tænkning er inkluderet i de faglige rammer for pædagoger og lærere.

Overblik og dømmekraft som en del af matematisk kompetence

Matematikundervisning er i Danmark på alle niveauer stærkt influeret af den kompetencetænkning, som er beskrevet i KOM-rapporten (Niss & Jensen, 2002), og matematisk kompetence er en af hjørnestenene i blandt andet folkeskolens Fælles Mål og det almene gymnasiums læreplaner. En vigtig del af at være matematisk kompetent er at besidde *overblik og dømmekraft*. At have matematisk overblik og dømmekraft sætter matematikken i et perspektiv, der rækker ud over skolen og undervisningen. Det er blandt andet overblikket og dømmekraften, der gør os i stand til at være kritiske, at tage beslutninger og at se på matematikken som en del af livet og verden. KOM-rapporten beskriver tre former for overblik og dømmekraft (OD):

- ▶ OD1. *Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder*
- ▶ OD2. *Matematikkens historiske udvikling såvel internt som i samfundsmæssig belysning*
- ▶ OD3. *Matematikkens karakter som fagområde.*

Til OD3 hører spørgsmål om eksempelvis matematikkens problemstillinger, tankegange, metoder og resultater, ligesom de mere videnskabelige og filosofiske aspekter af faget kan inkluderes her. Det er således især inden for denne form for overblik og dømmekraft, at den abstrakte tænkning befinder sig.

Matematisk overblik og dømmekraft er dog ikke blot en essentiel del af at være i stand til at tage beslutninger i matematikholdige situationer. Det er en viden om og forståelse af matematikken

som et samlet fagområde og om dette fagområdes rolle uden for matematikkens egen verden. Det er desuden et perspektiv på matematikken, som ikke nødvendigvis har til formål at kunne handle eller agere, men som i højere grad vedrører overvejelser – ikke kun angående forholdet mellem matematikken og verden, men også om matematikkens egen verden. Der ligger et stort potentiale i at fordybe sig i disse ikke-handlingsrettede aspekter af matematikken, som kan åbne for oplevelser og erkendelser, der kan bidrage til en åben og nysgerrig tilgang til faget. Når man for eksempel udforsker smukke geometriske mønstre eller pudsige talsammenhænge, åbner man børnenes øjne for matematikkens æstetik. En samtale om, hvor mange tallerkener der skal bruges til frokost, eller hvordan legetøjet kan sorteres, kan være en indgangsvinkel til matematikkens relevans. Et sådant potentiale kan og bør udfoldes og udnyttes allerede i de tidlige møder med matematikken.

Matematisk opmærksomhed

Ifølge dagtilbuddenes styrkede pædagogiske læreplan fra 2018 skal børnenes „matematiske opmærksomhed“ udvikles som en del af det område, der hedder „natur, udeliv og science“. Matematisk opmærksomhed kan opfattes som en forudsætning for at kunne udvikle matematisk kompetence. Det handler især om at bygge videre på børnenes naturlige nysgerrighed og videbegær ved at gribe de muligheder, der måtte opstå, for at gøre opmærksom på, undersøge og italesætte lovmæssigheder, mønstre og problemløsning.

Denne ambition er altså et oplagt udgangspunkt for at entrere matematikkens forunderlige og betagende verden sammen med førskolebørn. Umiddelbart vil en stor del af det pædagogiske arbejde med at udvikle matematisk opmærksomhed have konkrete objekter som omdrejningspunkt, men det er også muligt at udforske mere abstrakte begreber og filosofiske tanker sammen med børnene. Dette kan blandt andet ske gennem børnelitteratur, særligt billedbøger, hvor både tekst- og billedsiden er brugt til at formidle et matematisk relevant indhold.

Billedbøgers rolle i udviklingen af matematisk tænkning

Når børn begynder i et dagtilbud, besidder de allerede en hel del uformel matematisk viden om tal, regnearter, mængder, tid mv. (Heuvel-Panhuizen et al., 2009). Denne viden er udgangspunkt for deres senere matematiklæring, og en opmærksomhed på dette forhold kan have store fordele i relation til børnenes forståelse for og holdning til matematikken. Når man kombinerer litteratur med matematik, forærer man børnene en kontekst, der gør det muligt at videreudvikle deres forhåndsviden, og som kan involvere dem aktivt i matematiske undersøgelser og idéer.

” **Når man kombinerer litteratur med matematik, forærer man børnene en kontekst, der gør det muligt at videreudvikle deres forhåndsviden.**

Som allerede nævnt læses billedbøger oftest af børn og voksne i fællesskab, hvilket giver mulighed for dialog om både indhold og form. Hvis en billedbog beskæftiger sig med matematiske spørgsmål i tekst og/eller illustration, er det oplagt at inddrage det i en samtale om bogen. Det kan være, at barnet gør det af sig selv, men det kan også ske på den voksnes foranledning. Og det kan ske, første gang man læser bogen, eller det kan ske ved senere læsninger. Pointen er, at billedbøger tilbyder en fælles læseoplevelse og en fælles erfaring med et tema, som rummer et potentiale for videre bearbejdning. Her kan en billedbog om matematik altså blive et grundlag, man kan tage udgangspunkt i, og en fælles bagage, man senere kan henvise til.

Billedbøger har en særlig fordel, i og med at de kan vise matematiske begreber visuelt, hvilket er særligt understøttende for børns forståelse af abstrakte begreber (Heuvel-Panhuizen & Elia, 2012). Når børn læser billedbøger, møder de nye idéer, begreber, billeder og handlinger, som de kan kombinere med deres tidligere erfaringer og viden. Det skaber en slags „kognitive knager“, hvorpå de kan hænge nye forståelser og idéer. Faktisk vil små børn kunne forstå matematiske begreber, som de ikke kan forstå på et formelt plan, hvis blot de optræder i en kontekst, som er både følelsesmæssigt og kognitivt engagerende. Det kunne eksempelvis være begreber som uendelighed, variable eller symmetri. På den måde kan deres viden senere udvikle sig til en mere formel og generaliseret forståelse af matematik (Heuvel-Panhuizen & Boogaard, 2008).

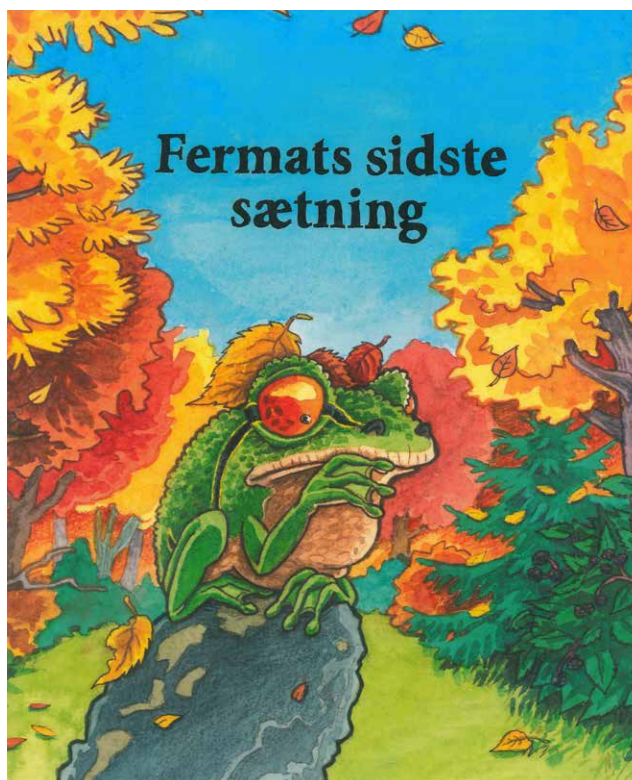
At læse en billedbog åbner således for en verden, der ikke bare kan legemliggøre matematiske objekter og begreber, men også kan illustrere karaktertræk ved matematiske tænkemåder og metoder, f.eks. i forhold til opfindsomhed, kreativitet, logik og struktur. En billedbog kan vække undren og nysgerrighed og danne naturligt udgangspunkt for både samtaler og aktive undersøgelser. Billedbøger er altså en oplagt ramme for uformel abstrakt tænkning med børn om f.eks. begreber som uendelighed, eksistens eller relativitet.

” Når børn læser billedbøger, møder de nye ideer, begreber, billeder og handlinger, som de kan kombinere med deres tidligere erfaringer og viden.

Billedbøger om matematik

Billedbøger om matematik har traditionelt set været tællebøger. Som et historisk og ganske velfungerende eksempel i denne kategori kan man nævne Thorbjørn Egners *1-2-3 Tælle-Boka* (1943, på dansk *Tællebogen*, 1977). Bogen er henvendt til førskolebørn og indeholder en mængde sjove rim og tegninger med opfordring til det læsende/lyttende barn om at tælle de dyr, der optræder på hver side. Implicit i teksten findes en række små opgaver, som går ud på at løse simple regnestykker. Rimene fungerer her som en facitliste, idet løsningen altid skal rime (ko/to, bli'/ti osv).

Et eksempel på en billedbog, der lægger op til en anden tilgang til matematik end de gængse tællebøger, er *Fermats sidste sætning* af Jan Egesborg, Johannes Töws og Pia Bertelsen. Bogen er et forsøg på at formidle glæden ved abstrakt, matematisk tænkning til børn, og den udgør et utraditionelt bud på hvordan. I bogen udfordres den vidende Hr. Frø af

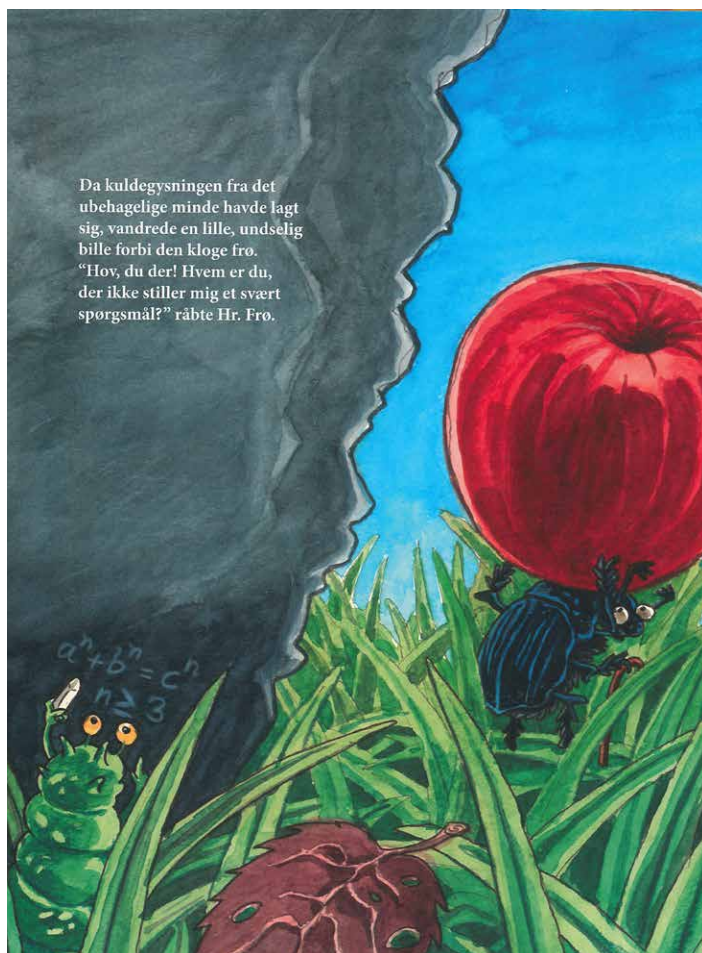


Billede 1: Egesborg, J., Töws, J., & Bertelsen, P. (2016). *Fermats sidste sætning* (2. udg.). Alvilda, forside.

spørgsmål, som involverer abstrakte matematiske begreber, og som læseren inviteres til at tænke med på.

Fermats sidste sætning kan kategoriseres som en dyrefabel og handler kort fortalt om den menneskeliggjorte Hr. Frøs udfordringer med at svare på et kryptisk spørgsmål fra en bille: „Vi antager, at det her helt røde æble, jeg bærer rundt på, er løsningen på en gåde, jeg ikke har lyst til at fortælle dig om. Men jeg vil alligevel gerne stille dig spørgsmålet: Eksisterer det her røde æble?“ (Egesborg et al., 2015, uden paginering). Efter at have grublet længe over spørgsmålets umiddelbart banale karakter opdager Hr. Frø, at æblet skifter farve. Først bliver det blå, derefter sort. Hr. Frø ender derfor med at konkludere, at eftersom et æble ikke kan være helt rødt, helt blå og helt sort på samme tid, må det betyde, at æblet slet ikke eksisterer.

Fermats sidste sætning handler således ikke om matematik som sådan. Og så alligevel. For selv om Hr. Frø „bare“ bakser med at bedømme et æbles eksistens, så udspringer historiens centrale spørgsmål – som titlen viser – af det berømte matematiske mysterium om Pierre de Fermats sidste sætning fra 1637. En sætning, som det efter mange års forsøg endelig lykkedes Andrew Wiles at bevise i 1995 med et modstridsbevis. I billedbogen er selve sætningen dog blot repræsenteret ved en kålorms undselige skriblerier på en sten. I stedet er det logikken bag beviset, der ligger til grund for historien, og dermed indeholder den overvejelser af mere filosofisk karakter om eksistens og modsigelser.



Billede 2: Fra Egesborg, J., Töws, J., & Bertelsen, P. (2016). *Fermats sidste sætning* (2. udg.). Alvilda.

Billedbogen byder således på muligheder for at adressere aspekter af matematikken, som hører ind under de tre former for overblik og dømmekraft. For det første er bogens centrale problem som nævnt ikke af matematisk karakter, men selve formuleringen af det, overvejelser om det og metoden, der anvendes til at løse det, er i bund og grund hentet fra matematikken. Når billen spørger Hr. Frø: „Vi antager, at det her helt røde æble, som jeg bærer rundt på, er løsningen på en gåde, som jeg ikke har lyst til at fortælle dig om. Men jeg vil alligevel gerne stille dig spørgsmålet: Eksisterer det her røde æble?“, så er spørgsmålet bygget op med en antagelse og en præcision (at æblet ikke bare er rødt, men *helt* rødt), som er karakteristisk for en matematisk problemformulering. Også Hr. Frøs vej til sin konklusion har rod i matematikken: et fornemt eksempel på en logisk følgeslutning, som leder frem til et modstridsbevis.

På den måde giver historien et eksempel på, hvordan matematikken kan anvendes i ikke-matematiske situationer (OD1). For det andet kan titlen på bogen danne udgangspunkt for en historisk bevidsthed om matematikkens udvikling (OD2), for hvem var Fermat egentlig, og hvad har han med denne historie at gøre? For det tredje har bogen potentiale til at danne udgangspunkt for mere filosofiske samtaler og diskussioner om blandt andet eksistens og modsigelser (OD3). Det er komplekse og måske endda uforståelige emner, især for børn, men med *Fermats sidste sætning* sættes de i en enkel og tryk kontekst. Så selv om historien måske efterlader læseren (eller lytteren) med flere spørgsmål, end den har givet svar på, så gør den opmærksom på både matematiske idéer, begreber og metoder, som kan bidrage til det fundament, som den matematiske forståelse kan bygges på.

” Det er komplekse og måske endda uforståelige emner, især for børn, men med *Fermats sidste sætning* sættes de i en enkel og tryk kontekst.

Alle tæller med

Et andet eksempel på en billedbog, som blander matematik og filosofi, er Kristin Roskiftes *Alle sammen tæller* fra 2018 (på dansk *Alle tæller med*, 2019). Bogen blev i 2019 tildelt Nordisk Råds børne- og ungdomslitteraturpris og er ved første øjekast en klassisk tælle- og myldrebog. Det særegne er dog, at den kombinerer den konkret orienterede tællebogsgenre med et abstrakt lag, hvor nogle af livets små og store spørgsmål bliver reflekteret. Dermed inviteres barnet til at deltage i både eksistentielle og filosofiske overvejelser og samtaler. Billedbogen er udgivet i et stort format (25 × 34 cm), hvor barnelæseren gennem opslagene detaljerede tegninger får anskuelserundervisning i mængdelære fra nul til syv milliarder. Det, der tælles, er mennesker, og det enkle humanistiske budskab er, at alle mennesker har en værdi, som rækker ud over det numeriske. Opslagene reflekterer en verden fuld af modsætninger mellem eksempelvis få og mange, natur og kultur, ydre og indre, ensomhed og fællesskab. I begyndelsen ser man ét barn, der ligger helt alene i sin seng omgivet af legetøj, mens han ser på himlens stjerner og tænker på, hvor mange mennesker der kigger med. I et senere opslag ser man for eksempel elleve børn, der spiller fodbold, men samtidig får man at vide, at en af dem ikke bryder sig om det. Senere møder man 30 mennesker i en park, og af disse er der to, som aldrig har været der før, og en, der står på hænder, imens der foregår en forbrydelse, som ingen ser. Barnelæseren/beskueren opfordres med de korte tekstindslag til at gå på opdagelse i illustrationsdetaljerne og tænke med på begivenhederne og deres eventuelle kausalitet.



Billede 3: Roskifte, K. (2019). *Alle tæller med*. ABC Forlag, forside.

Et opslag viser 19 kontormus på arbejde, et andet rummer 100 børn i en skolegård, et tredje illustrerer 200 badegæster på en eksotisk strand, og et fjerde viser 400 mennesker til demonstration for ligestilling og retfærdighed! Den korte tekst til hvert billede er i sig selv kontrastfyldt og tankevækkende: „Tyve personer i en historietime på skolen. En tænker på alle, som har levet før os. En har mistet klassebamsen. En frygter for fodboldtræningen. En bliver statsminister.“ (Roskifte, 2019, uden paginering). Her er det oplagt at reflektere over fænomener som tid, samtidighed og tilfældighed. Er der en indre sammenhæng mellem alt det, der foregår på samme tid, eller er der tale om tilfældige sammenfald?



20

Tyve personer i en historietime i skolen.
 En tænker på alle, som har levet før os. En har mistet klassebamsen.
 En frygter for fodboldtræningen. En bliver statsminister.

Billede 4: Fra Roskifte, K. (2019). *Alle tæller med*. ABC Forlag.

Et par af de sidste opslag i bogen viser henholdsvis en strand og universet, og her opfordres barnet på forskellig vis til at overveje, hvad uendelighed er (uden nødvendigvis at bruge begrebet). På strandopslaget nævnes spørgsmålet om antallet af sandkorn, og på opslaget med universet nævnes antallet af mennesker på jorden, samtidig med at stjernerne på himlen glimter. „Syv og en halv milliard mennesker på samme planet“, lyder teksten, og der er lagt op til en diskussion af implikationerne i dette antal.

Matematik som integreret område

Hvor *Fermats sidste sætning* pakker matematikkens natur ind i en ikke-matematisk historie, forholder det sig omvendt i *Alle tæller med*: De abstrakte og tankevækkende spørgsmål pakkes ind i tal og mængder. At tælle og forholde sig til store eller små mængder fremstår ikke som en isoleret disciplin, men som en integreret og meningsfuld del af tilværelsen. Samtidig er der et stærkt fokus på tid som et både fysisk og filosofisk fænomen. Mange begivenheder skildres som værende samtidige, uden at de nødvendigvis har forbindelse til hinanden. Derved bliver også spørgsmålet om kausalitet berørt. Også Roskiftes bog har altså potentiale til at belyse matematikkens anvendelse i sammenhæng med andre fagområder (OD1) og matematikkens karakter som fagområde (OD3), men dog på en måde, hvor matematikken og mængdelæren diskret udgør konteksten og udgangspunktet for en fælles udforskning af de store spørgsmål.

” At tælle og forholde sig til store eller små mængder fremstår ikke som en isoleret disciplin, men som en integreret og meningsfuld del af tilværelsen.

Matematisk opmærksomhed handler altså ikke blot om at regne eller løse opgaver, sådan som man ellers nemt kunne forledes til at tro, når man konsulterer nogle af de lægmandsmaterialer, der findes til salg i supermarkeder og på nettet. Her opfordres barnet indimellem til at løse simple opgaver med guldstjerner som præmie. Det er en velmenende, men i længden meget kedelig aktivitet, som kan være kontraproduktiv i forhold til forestillingerne om matematikkens væsen og indhold.

Kunstnerisk bearbejdede billedbøger kan være med til at introducere matematik og danne grundlaget for matematisk opmærksomhed på en mere nuanceret måde, hvor barnet opfordres til at reflektere over områder af matematikken, som ofte overses i førskole- og indskolingsammenhæng.

Referencer

- Egesborg, J., Töws, J., & Bertelsen, P. (2016). *Fermats sidste sætning* (2. udg.). Alvilda.
- Egner, T. (1977 [org. 1943]). *Tælle-Bogen*. Gyldendal.
- EVA, Danmarks Evalueringsinstitut (2018). Matematisk opmærksomhed. *EVA TEMA*, 13.
- EVA, Danmarks Evalueringsinstitut & BUM, Børne- og Undervisningsministeriet (2019). *Kort om natur, udeliv og science*. <https://www.eva.dk/dagtilbud-boern/kort-om-natur-udeliv-science>
- Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Beliefs. I: Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (red.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 39-58). Kluwer Academic Publishers.
- Heuvel-Panhuizen, M. v. d., & Boogaard, S. v. d. (2008). Picture books as an impetus for kindergartners' mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 341-373.
- Heuvel-Panhuizen, M. v. d., Boogaard, S. v. d., & Doig, B. (2009). Picture books stimulate the learning of mathematics. *Australasian Journal of Early Childhood*, 34(3), 30-39.
- Heuvel-Panhuizen, M. v. d., & Elia, I. (2012). Developing a framework for the evaluation of picture-books that support kindergartners' learning of mathematics. *Research in Mathematics Education*, 14(1), 17-47.
- Niss, M., & Jensen, T. H. (red.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Undervisningsministeriet. Rapport.
- Roskifte, K. (2019). *Alle tæller med*. ABC Forlag.
- Schoenfeld, A. H. (1988). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of 'Well-Taught' Mathematics Courses. *Educational Psychologist*, 23(2), 145-166.

Om forfatterne

Maria Kirstine Østergaard er cand.pæd. i matematikkens didaktik og ph.d.-studerende ved Københavns Professionshøjskole og Aarhus Universitet (DPU), hvor hun forsker i elevers forestillinger om matematik. Hun har tidligere undervist i folkeskolen og på læreruddannelsen.

Anna Karlskov Skyggebjerg er lektor i børne- og ungdomslitteratur og litteraturdydidaktik ved Aarhus Universitet (DPU). Hun har forsket i fantastisk litteratur, historiske romaner og faglitteratur samt i læremidler og børns fiktionsskrivning i fritiden. Udover videnskabelige bøger og artikler har hun udgivet en række læremidler til grundskole og læreruddannelse.